Épreuve 2025
Mathématiques
(concours ENAC EPL/S)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques du concours EPL/S 2025.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 2h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Le candidat doit choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité n'est appliquée.

Questions liées
1 à 6
7 à 11
12 à 17
18 à 23
24 à 32
33 à 36

PARTIE I

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{\in\mathbb{N}}$ par $T_0 = 1, T_1 = X$ et
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$

Question 1 :

A - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = -T_n(X)$.
B - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = T_n(X)$.
C - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.
D - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = T_n'(X)$.

Question 2 :

A - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\sin(\theta)) = \sin(n\theta)$.
B - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\sin(\theta)) = (\sin(\theta))^n$.
C - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
D - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = (\cos(\theta))^n$.

Question 3 :

On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines complexes de T_n comptées avec leur ordre de multiplicité.

A - Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on peut avoir $\alpha_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
B - Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on peut avoir $\alpha_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.
C - Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on peut avoir $\alpha_k = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
D - Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on peut avoir $\alpha_k = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.

Question 4 :

On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines complexes de T_n comptées avec leur ordre de multiplicité.

A - $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n$.

B - $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

C - $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$ si n est pair et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^{(n-1)/2}$ si n est impair.

D - $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^{n/2}$ si n est pair et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$ si n est impair.

Question 5 :

A - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k X^{n-2k}$.

B - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (1-X^2)^k X^{n-2k}$.

C - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k X^{2n-k}$.

D - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (1-X^2)^k X^{2n-k}$.

Question 6 :

A - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - \sqrt{1-x^2})^n\right]$$

B - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n\right]$$

C - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{1-x^2})^n + (x - \sqrt{1-x^2})^n\right]$$

D - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n\right]$$

PARTIE 2

Si $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.
On rappelle que $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$ où $\omega = e^{i2\pi/n}$.

Question 7 :

Dans cette question l'entier naturel n est supposé supérieur ou égal à 2.

A - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \frac{1}{\omega - 1}$.

B - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \frac{n}{\omega - 1}$.

C - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = n(k+1)\omega^k$.

D - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \frac{k}{\omega - 1}$.

Question 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

A - $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1| = -1$.

B - $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1| = \arctan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

C - $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1| = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

D - $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1| = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

Question 9 :

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

A - Si $(z, z') \in (\mathbb{U}_n)^2$ alors $z + z' \in \mathbb{U}_n$.

B - Si $z \in \mathbb{U}_n$ et si $z' \in \mathbb{U}_m$ alors $z \times z' \in U_{\max(n,m)}$.

C - Si $z \in \mathbb{U}_n$ et si $z' \in \mathbb{U}_m$ alors $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}_{\min(n,m)}$.

D - Dans $\mathbb{C}[X]$ on a : $\displaystyle\prod_{z \in \mathbb{U}_n} (X - z) = X^n + 1$.

Question 10 :

Soit $z = \dfrac{3+4i}{5}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_n = \operatorname{Re}\left((3+4i)^n\right)$ et $y_n = \operatorname{Im}\left((3+4i)^n\right)$.

A - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ et $y_{n+1} = 4x_n + 3y_n$.

B - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(k_n, k'_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x_n = 3 + 5k_n$ et $y_n = 4 + 5k'_n$.

C - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(k_n, k'_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x_n = 4 + 5k_n$ et $y_n = 3 + 5k'_n$.

D - On a $|z| = 1$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z \in \mathbb{U}_n$.

Question 11 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \exp(i2\pi/(n+1))$.
On se donne aussi $P = \sum_{p=0}^{n} a_p X^p \in \mathbb{C}_n[X]$ quelconque et on note M le réel défini par
$M = \max\left\{ |P(\omega^k)| \;\middle|\; k \in [\![0, n]\!] \right\}$.

A - On a $M > 0$.

B - Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\omega^k)^p = 0$.

C - On a $\displaystyle\left| \sum_{k=0}^{n} P(\omega^k) \right| \leq (n+1)M$.

D - On a $|a_0| \leq M$.

PARTIE 3

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{2+u_n}$.

Question 12 :

A - $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante.

B - $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.

C - $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite bornée.

D - $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une suite majorée.

Question 13 :

On définit aussi une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.

A - $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique.

B - $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente.

C - Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ alors $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^n$.

D - Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ alors $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \ln(n) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Question 14 :

A - $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

B - $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

C - (u_n) est une suite convergente.

D - $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

Question 15 :

Si f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, et $k \in \mathbb{N}^*$ on pose :
$J_k = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_k^{k+1} \left(t - k - \dfrac{1}{2}\right)^2 f''(t)\,\mathrm{d}t$. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$.

A - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) - f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$.

B - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$.

C - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1} J_k$.

D - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$.

Question 16 :

On se donne $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n \leq p$ et on pose $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$.

A - $\displaystyle 0 \leq \sum_{k=n}^{p} J_k \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right)$.

B - $\displaystyle 0 \leq \sum_{k=n}^{p} J_k \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{p^2}\right)$.

C - $\displaystyle 0 \leq \sum_{k=n}^{p} J_k \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right)$.

D - $\displaystyle 0 \leq \sum_{k=n}^{p} J_k \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{p^2}\right)$.

Question 17 :

A - Il existe un réel α tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \alpha + \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

B - Il existe un réel α tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \alpha - \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

C - Il existe un réel α tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \alpha + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

D - Il existe un réel α tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \alpha - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

PARTIE 4

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Question 18 :

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

A - La série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ converge.

B - La série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

C - La série $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ converge.

D - La série $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ diverge.

Question 19 :

On suppose que la série $\sum u_n$ diverge.

A - Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1$ alors $\frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$.

B - Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1$ alors la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

C - Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1$ alors la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ converge.

D - Si la suite $\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 1 alors la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ converge.

Question 20 :

On suppose que la série $\sum u_n$ diverge.

A - La série $\sum \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right)$ converge.

B - La série $\sum \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right)$ diverge.

C - La série $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ converge.

D - La série $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ diverge.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$.

Question 21 :

Après linéarisation :

A - $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) - \frac{3}{4}\cos(3x)$.

B - $\sin^3(x) = \frac{1}{4}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin(x)$.

C - $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}\sin(3x)$.

D - $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$.

Question 22 :

A - La série $\sum u_n$ diverge.

B - La série $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\frac{1}{4}\sin(x)$.

C - La série $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}\sin(3x)$.

D - La série $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin(x)$.

Question 23 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{\sin^2(n\theta)}{n!}$.

A - La série $\sum u_n$ diverge.

B - La série $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}e^{\cos(2\theta)}\cos(\sin(2\theta))$.

C - La série $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}e^{\cos(2\theta)}$.

D - La série $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}e^{\cos(2\theta)}\cos(2\theta)$.

PARTIE 5

$\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Question 24 :

Soit n un entier naturel non nul.

A - (X, X^4) est une base de $\mathbb{F} = \{aX^4 + (a+b)X \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

B - Si $(P_1, \ldots, P_n)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ de degrés deux à deux distincts alors elle est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

C - Si $\mathbb{G} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid X^3 \text{ divise } P\}$ alors $\mathbb{K}[X] = \mathbb{G} \oplus \mathbb{K}_3[X]$.

D - La famille $(X^k(X-1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Question 25 :

Soit n est un entier naturel non nul.

A - Si $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}((0,1,1),(1,0,2))$ et $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}((0,1,2))$ alors $\mathbb{R}^3 = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

B - Si $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel de dimension finie et au moins égale à 2 et si $\mathbb{H}$ est un hyperplan de $\mathbb{E}$, alors pour tout vecteur $x \in \mathbb{E}$ non nul on a $\mathbb{E} = \mathbb{H} \oplus \mathrm{Vect}(x)$.

C - Si $\mathbb{F}$ est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\mathbb{G}$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

D - Si $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel de dimension finie au moins égale à 2 et si x et y sont des vecteurs distincts de $\mathbb{E}$ alors $\mathrm{Vect}(x,y) = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathrm{Vect}(y)$.

Question 26 :

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des applications linéaires g de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ telles que $f \circ g \circ f = 0$.

A - f est surjective.

B - f est injective.

C - Il existe $g \in \mathscr{H}$ telle que g est injective.

D - $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ de dimension 2.

Question 27 :

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$.

A - Si $x \in \mathbb{E}$ et $f(x) = 0_E$ alors $x = 0_E$ puisque f est linéaire.

B - $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

C - $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

D - Comme f est un endomorphisme on a $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f^2)$.

Question 28 :

Soit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

A - Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Alors : $MD = DM \Leftrightarrow M$ est triangulaire.

B - L'équation $M^3 - 2M = D$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ a 3 solutions.

C - L'équation $M^3 - 2M = D$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ a 6 solutions.

D - L'équation $M^3 - 2M = D$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ a 9 solutions.

Question 29 :

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$.
Soient p et q des projecteurs de $\mathbb{E}$.

A - $p + q$ est un projecteur.

B - Il existe un réel $\alpha \neq 0$ tel que αp est un projecteur.

C - On a $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$.

D - $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$ si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

Question 30 :

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on note p la projection orthogonale sur le plan $\mathbb{F}$ d'équation $x + y + z = 0$. On note M la matrice de p dans la base canonique.

A - $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

B - $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

C - Si $u = (1, 2, 3)$ alors la distance de u à $\mathbb{F}$ est $d(u, \mathbb{F}) = 6$.

D - Si $u = (1, 2, 3)$ alors la distance de u à $\mathbb{F}$ est $d(u, \mathbb{F}) = 2$.

Question 31 :

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

A - f est un projecteur orthogonal.

B - f est une symétrie orthogonale.

C - La symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Im}(f)$ est représentée dans la base canonique par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

D - La symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Im}(f)$ est représentée dans la base canonique par $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 32 :

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée n et non réduit à $\{0_E\}$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0$ et $f \neq \mathrm{id}_E$.

A - f est un projecteur.

B - $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$.

C - $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)) \geq n$.

D - $\mathbb{E} \neq \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$.

PARTIE 6

Question 33 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n$ fois une pièce de monnaie équilibrée.

A - La probabilité d'avoir autant de « pile » que de « face » est égale à $\binom{2n}{n}\frac{1}{2^n}$.

B - La probabilité d'avoir une alternance de « pile » et de « face » commençant par « pile » (i.e. PFPFPF...PF) est égale à $\frac{1}{2^n}$.

C - La probabilité d'avoir au plus un « pile » est égale à $\frac{n+1}{2^n}$.

D - En moyenne le nombre de « pile » obtenu est égal à n.

Question 34 :

On dispose de 2 dés A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On commence par lancer une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir « pile » soit 1/3.

— Si on obtient « pile » on décide de jouer **uniquement** avec le dé A ;
— Si on obtient « face » on décide de jouer **uniquement** avec le dé B.

A - La probabilité d'avoir une face rouge au premier lancer de dé est égale à $\frac{2}{9}$.

B - La probabilité d'avoir deux faces rouges aux deux premiers lancers est égale à $\frac{2}{9}$.

C - Les évènements « avoir une face rouge au premier lancer de dé » et « avoir une face rouge au second lancer de dé » sont indépendants.

D - Sachant que les deux premiers lancers de dé ont donné deux faces rouges, la probabilité d'avoir une face rouge au troisième lancer de dé est égale à $\frac{2}{9}$.

Question 35 :

Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes deux une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $T = U_1 - U_2$ et $V = U_1 + U_2$.

A - T et V suivent une loi binomiale.

B - Il existe un $p \in]0,1[$ pour lequel T et V suivent une loi uniforme.

C - $\mathrm{Cov}(T, V) = 0$.

D - T et V sont indépendantes.

Question 36 :

On considère b boules ($b \geq 2$) numérotées de 1 à b réparties dans deux urnes A et B. Lors de chaque étape on tire au hasard un entier entre 1 et b, et on change d'urne la boule portant ce numéro. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules dans l'urne A à l'étape n (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Initialement il y a donc X_0 boules dans l'urne A et $b - X_0$ boules dans l'urne B.

A - La variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$ prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$.

B - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = 1 - \dfrac{2}{b}E(X_n)$.

C - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $E(X_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{b}\right) E(X_n) + 1$.

D - $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n) = \dfrac{b}{2}$.