Épreuve 2024
Mathématiques
(concours ENAC EPL/S)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques du concours EPL/S 2024.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 2h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Le candidat doit choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité n'est appliquée.

Questions liées

3-4
5 à 8
12 à 15
16 à 18
22-23
32-33

PARTIE I

Question 1 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$ et $u_n = S_{2n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

A - Si n est pair, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$

B - $u_n = \sum_{k=1}^{n} (2k)^2 - \sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2$

C - $S_{2n} > 0$ et $S_{2n+1} < 0$

D - $u_{n+1} = u_n - (2n+1)^2$

Question 2 :

A - Pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n-1}$

B - Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\binom{2n}{n} > \binom{2n+1}{n+1}$

C - Pour tout $n \geqslant 3$ et tout $2 \leqslant k \leqslant n-2$ on a $\binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k}$

D - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2n}{n} < 4^n$

PARTIE II

Question 3 :

Soit l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 - 4\overline{z} - 4 = 0$

A - Cette équation admet exactement deux solutions

B - Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

C - Cette équation admet une unique solution dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

D - z solution implique $(z - \overline{z})(z + \overline{z} + 4) = 0$

Question 4 :

L'ensemble des solutions de l'équation précédente est

A - $\{2-2\sqrt{2}\ ;\ 2+2\sqrt{2}\}$

B - $\{2-2\sqrt{2}\ ;\ 2+2\sqrt{2}\ ;\ 2-2\sqrt{2}i\ ;\ 2+2\sqrt{2}i\}$

C - $\{2-2\sqrt{2}\ ;\ 2+2\sqrt{2}\ ;\ -2-2\sqrt{2}i\ ;\ -2+2\sqrt{2}i\}$

D - $\{-2-2\sqrt{2}i\ ;\ -2+2\sqrt{2}i\}$

Question 5 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $w_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$

A - $\{w_n^k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$ est l'ensemble des racines du polynôme $X^{2n} - 1$

B - $w_n \in \mathbb{U}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

C - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pair, $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(X - w_n^k\right)$ appartient à $\mathbb{R}[X]$

D - Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que w_n^k soit racine de $X^n + 1$

Question 6 :

Pour tout $n \geqslant 1$:

A - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_n^k = 0$

B - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_n^k = \frac{1 - w_n^n}{1 - w_n}$

C - $\left(1 - w_n^k\right)\left(1 - \overline{w}_n^k\right) = 2 - 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

D - $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} w_n^k = (-1)^n$

Question 7 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

A - $\dfrac{2w_n}{1 - w_n} = \dfrac{2\overline{w}_n}{1 - \overline{w}_n}$ si et seulement si $n = 1$

B - $\dfrac{2w_n}{1 - w_n} + \dfrac{2\overline{w}_n}{1 - \overline{w}_n} = 2$

C - $\dfrac{2w_n}{1 - w_n} \times \dfrac{2\overline{w}_n}{1 - \overline{w}_n} = 4$

D - $\dfrac{2w_n}{1 - w_n} = \dfrac{ie^{i\frac{\pi}{2n}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$

Question 8 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} |1 - w_n^k|^2$. Pour tout $n \geqslant 1$:

A - $S_n \leqslant 2n$

B - $S_n = 2n - \dfrac{2w_n}{1 - w_n} - \dfrac{2\overline{w}_n}{1 - \overline{w}_n}$

C - $S_n = \sum_{k=1}^{n}(1 - w_n^k) \times \sum_{k=1}^{n}(1 - \overline{w}_n^k)$

D - $S_{n+1} = S_n + |1 - w_n^{n+1}|^2$

PARTIE III

Pour un réel a quelconque $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière de a.

Question 9 :

Soit l'équation (E_1) : $\lfloor 2x \rfloor = x$

A - (E_1) a les mêmes solutions que $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor$

B - (E_1) admet plusieurs solutions

C - x solution de (E_1) implique $x \in \mathbb{Z}$

D - x solution de (E_1) implique $2x - 1 \leqslant x < 2x$

Question 10 :

Soit l'équation (E_2) : $\lfloor 2x \rfloor = x^2$

A - (E_2) admet une infinité de solutions

B - x solution de (E_2) implique $x \in [0; 2]$

C - x solution de (E_2) est équivalent à $x^2 \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$

D - x solution de (E_2) implique $x \geqslant 0$

Question 11 :

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) : $\lfloor 2x \rfloor = x^n$ et S_n l'ensemble de ses solutions

A - x solution de (E_n) implique $2x - 1 < x^n \leqslant 2x$

B - Si n est pair et $n \geqslant 4$: $S_n = \left\{0\ ;\ 2^{\frac{1}{n}}\ ;\ 3^{\frac{1}{n}}\right\}$

C - Il existe un entier $n \geqslant 4$ pair tel que (E_n) admette au moins une solution dans $]-\infty\ ;\ 0[$

D - Il existe une suite $(x_n)_n$ avec $x_n \in S_n$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = +\infty$

PARTIE IV

Question 12 :

Soit l'équation différentielle $xy' + y = 0$ d'ensemble de solutions S_H sur $]0\ ;\ +\infty[$

A - $S_H = \left\{ f_\lambda : x \mapsto \frac{\lambda}{x} e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

B - S_H est un espace vectoriel de dimension 2

C - Si $y \in S_H$ alors $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$

D - $y \in S_H \Leftrightarrow xy'' + 2y' = 0$

Question 13 :

Soit f définie sur $]-2\ ;\ 2[$ par $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$. Une primitive F de f est définie sur $]-2\ ;\ 2[$ par :

A - $F(x) = 2\arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

B - $F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$

C - $F(x) = x\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - 2\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}$

D - $F(x) = x\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

Question 14 :

Si y est une solution quelconque de $xy' + y = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $]0\ ;\ 2[$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, au voisinage de 0, on ait

A - $y(x) = \dfrac{\lambda + 1}{x} + \dfrac{3}{8}x + o\left(x^2\right)$

B - $y(x) = \dfrac{\lambda + 2}{x} + \lambda + \dfrac{\lambda}{2}x + \dfrac{\lambda^2}{4}x^2 + o\left(x^2\right)$

C - $y(x) = \dfrac{\lambda + 2}{x} + \dfrac{1}{4}x + o\left(x^2\right)$

D - $y(x) = \lambda + x + \dfrac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$

Question 15 :

On en déduit que pour l'équation $xy' + y = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

A - Il n'y a aucune solution définie sur $]-2\ ;\ 2[$

B - Il y a une infinité de solutions définies sur $]-2\ ;\ 2[$

C - Il y a une unique solution définie sur $\mathbb{R}$

D - Toute solution y définie $]-2\ ;\ 2[$ vérifie $y'(0) = \dfrac{1}{4}$

PARTIE V

Question 16 :

Pour toute suite $(u_n)_n$ à termes dans $]0\,;1[$

A - Les séries $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n \ln(1+u_n)$ sont de même nature

B - La série $\sum\limits_n \ln(1+u_n)$ converge si et seulement la suite des sommes partielles $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+u_k)$ est majorée

C - Les séries $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n u_n(1-u_n)$ sont de même nature

D - Si $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n \ln(1+u_n)$ convergent alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(1+u_n)$

Question 17 :

Pour $a \in]0\,;1[$ on pose $p_n(a) = \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right)$ et $q_n(a) = \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 - a^{2^k}\right)$

A - $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(a) = +\infty$ car $\dfrac{p_{n+1}(a)}{p_n(a)} > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

B - $(p_n(a))_n$ converge vers une limite $l(a) \in]1\,;+\infty[$ car $(\ln(p_n(a)))_n$ converge vers une limite $L(a) > 0$

C - $(q_n(a))$ tend vers 0

D - $(q_n(a))$ tend vers une limite $m(a) > 0$

Question 18 :

A - $p_n(a) \times q_n(a) = q_{n+1}(a)$

B - $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(a) = \dfrac{1+a}{1-a}$

C - Pour tout $n \geqslant 3$, $q_n(a)$ admet un développement limité à l'ordre 5 lorsque a tend vers 0 qui s'écrit $q_n(a) = 1 - a - a^2 + a^3 - a^4 + a^5 + o(a^5)$

D - Pour tout $n \geqslant 3$, $q_n(a)$ admet un développement limité à l'ordre 5 lorsque a tend vers 0 qui s'écrit $q_n(a) = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + o(a^5)$

PARTIE VI

Question 19 :

Soit $P = X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2$

A - 1 est racine de P avec une multiplicité de 3

B - P admet plusieurs racines réelles distinctes

C - Le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$ est $R = 12X - 12$

D - Le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$ est $R = 2X^2 - 3X + 1$

Question 20 :

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $E_n = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in [\![0\,;n]\!]\ P^k(1) = 1\}$

A - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P \in E_n \Leftrightarrow E_{n-1}$

B - $P \in E_n$ si et seulement si le reste R de la division euclidienne de P par $(X-1)^{n+1}$ appartient à E_n

C - $P_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(X-1)^k}{k!}$ est l'unique élément de E_n

D - $F_n = \{P - P_0 \mid P \in E_n\}$ est un espace vectoriel

---

PARTIE VII

Dans cette partie E est un espace vectoriel non trivial. Pour une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de vecteurs de E, on note $Vect(x_1, x_2, ..., x_n)$ l'espace vectoriel engendré par cette famille ; $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E est l'application identité de E dans E. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont inversibles. Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(M)$ est le déterminant de M et $\mathrm{rg}(M)$ est le rang de M. La matrice I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 21 :

Soit $F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$ et $G = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$

A - $F \cup G$ est un espace vectoriel de dimension 3

B - $F \cap G$ est un espace vectoriel de base $((2;0;2))$

C - $F + G = \mathbb{R}^3$

D - Pour tout $(a;b;c) \in F \setminus \{0\}$, $Vect((a;b;c))$ et G sont supplémentaires dans R^3

Question 22 :

Pour $t \in \mathbb{R}$, $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ 1 & 2 & t \\ t & 4 & 4 \end{pmatrix}$

A - $\det(M_t) = 0 \Leftrightarrow t = -4$

B - $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{rg}(M_t) \in \{2\,;3\}$

C - Si $t = 0$, M_t est inversible

D - Il existe un réel t tel que $\dim(\mathrm{Ker}(M_t)) = 2$

Question 23 :

Le système d'inconnues x, y, z : $\begin{cases} x + ty + 2z = a \\ x + 2y + tz = b \\ tx + 4y + 4z = c \end{cases}$

A - admet une solution unique ou une infinité de solutions suivant la valeur de t

B - admet des solutions lorsque $t = -4$ si et seulement si $2a + 2b + c = 0$

C - admet des solutions lorsque $t = 2$ si et seulement si $a = b = 1$ et $c = 2$

D - admet un ensemble de solutions qui est toujours un espace vectoriel s'il est non vide

Question 24 :

Pour tous hyperplans H_1, H_2, H_3 deux à deux distincts d'un espace vectoriel E de dimension $d > 3$

A - $H_1 \oplus H_2 = H_1 \oplus H_3 = H_2 \oplus H_3 = E$

B - $H_1 + (H_2 \cap H_3) = E$

C - $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = d - 3$

D - $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = d - 2$

Question 25 :

$f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f \neq 0$ et $f \circ f = 2f$

A - Cela revient à $f = 2Id_E$

B - $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

C - $f(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathrm{Im}(f)$

D - Il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que λf soit une projection

Question 26 :

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N \neq 0$, $N^3 = 0$ et $A = I_n + N$

A - Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k \in Vect(I_n, A, A^2)$

B - A est inversible et $A^{-1} = A^2 + 3A + I_n$

C - $A^4 = I_n + 4N + 8N^2$

D - Il existe un unique $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = X$

Question 27 :

Soit $A = P \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P \in GL_3(\mathbb{R})$

A - $(A - I_3)^2 = 0$

B - Il existe un unique $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = P \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec a et b non nuls

C - Si $M = P(A - I_3)P^{-1}$ alors $M^3 = 0$

D - Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = P \begin{pmatrix} 1 & -k & k+1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Question 28 :

Soit le déterminant $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix}$. Pour tous réels a, b, c on a :

A - $D(a,b,c) = D(c,b,a)$

B - $D(a,b,c) = 0 \Leftrightarrow a = b$ ou $b = c$

C - $D(a,b,c) = (a-c)(b-c)c$

D - $D(a,b,c) = (a-b)(b-c)(c-a)$

PARTIE VIII

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(.|.)$ et de la norme qui y est associée notée $\|.\|$, la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ étant alors orthonormée.

Question 29 :

A - $(e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$

B - $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ \|u+v\|^2 \geqslant \frac{1}{4}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\|v\|^2$

C - $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ \|u+v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow (u|v) = 0$

D - Si pour $u \in \mathbb{R}^3$ donné $(e_1 + u, e_2 + u, e_3 + u)$ est une base orthogonale alors elle est orthonormale

Question 30 :

p est la projection orthogonale sur $H = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$

A - $p((x;y;z)) - (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(p)$

B - $p((1;1;1)) = (1;2;0)$

C - $\mathrm{Ker}(p) = Vect((2;-1;1))$

D - Il existe un unique $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $p(u) = (0;1;1)$

Question 31 :

Pour $\alpha \in]0;\pi[$ on pose $u_\alpha = \cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_3$ et $D_\alpha = Vect(u_{\alpha)}$.
p_α est la projection sur $F = Vect(e_1, e_2)$ parallèlement à D_α

A - Pour tout $\alpha \in]0;\pi[$, p_α n'est pas une projection orthogonale

B - Pour tout $\alpha \in]0;\pi[$, $p_\alpha(e_3) = -\sin(\alpha)e_1$

C - Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $(p_\alpha(x)|x) = 0 \Rightarrow x \in\ \mathrm{Ker}(p_\alpha)$

D - Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ l'ensemble $G = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|p_\alpha(x)\| = \|x\|\}$ contient un espace vectoriel de dimension 2 autre que F.

PARTIE IX

Une urne contient au départ huit boules numérotées de 1 à 8, les boules 1,2,3 sont rouges et les autres sont noires. Il est équiprobable de tirer n'importe laquelle de ces boules. On tire successivement cinq boules soit avec remise -c'est à dire que chaque boule tirée est remise dans l'urne avant tirage de la suivante-, soit sans remise dans le cas où chaque boule tirée est définitivement retirée de l'urne.

Question 32 :

A - La probabilité que sur les cinq boules tirées exactement trois soient rouges étant p_1 dans le cas sans remise et p_2 avec remise on a $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{8^4}{7 \times 6 \times 5 \times 3^3}$

B - Dans le cas sans remise, la probabilité que les trois premières boules tirées soient rouges n'est pas identique à la probabilité que les trois dernières boules tirées soient rouges

C - Dans le cas sans remise la probabilité que sur les cinq boules tirées trois soient rouges est $\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}}$

D - Dans le cas du tirage de cinq boules avec remise, la probabilité que chaque boule tirée soit de couleur différente de la précédente est $\dfrac{3^3 \times 5^2}{8^5}$

Question 33 :

Chaque boule rouge tirée rapporte deux points, chaque boule noire enlève un point. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus après tirage sans remise de cinq boules.

A - $E(X) = \dfrac{6 \times \binom{5}{2} + 4 \times \binom{5}{3} + 2 \times \binom{5}{4}}{\binom{8}{5}}$

B - X peut prendre toutes les valeurs de $[\![-5\,;4]\!]$

C - $E(X) = \dfrac{35}{\binom{8}{5}}$

D - $E(X) \leqslant 0$

On lance n fois, avec $n \geqslant 2$, une pièce de monnaie équilibrée. Soient les évènements A : « on obtient au plus une fois face » et B : « on obtient au moins une fois face et au moins une fois pile »

Question 34 :

A - Quel que soit $n \geqslant 2$, $P(A) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

B - Quel que soit $n \geqslant 2$, $P(A \cap B) = n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

C - Quel que soit $n \geqslant 2$, A et B ne sont pas indépendants

D - $\overline{A}$ est « on obtient au moins une fois face »

Un virus est susceptible d'infecter les habitants d'une grande ville. Certains individus infectés peuvent rester chez eux, d'autres doivent être hospitalisés du fait de leur état. Un vaccin existe contre ce virus et 90% des habitants sont vaccinés. On constate que 50% des personnes hospitalisées à cause du virus étaient préalablement vaccinées. On note, pour un habitant choisi au hasard, H l'évènement « la personne est hospitalisée à cause du virus » et V l'évènement « la personne est vaccinée ».

Question 35 :

A - H est indépendant de V

B - $P_V(H) = P_{\overline{V}}(H) = 0,5$

C - Un habitant a neuf fois plus de chances d'être hospitalisé à cause du virus s'il n'est pas vacciné que s'il l'est

D - Un habitant a dix fois plus de chances d'être hospitalisé à cause du virus s'il n'est pas vacciné que s'il l'est

Un questionnaire comporte 20 questions avec pour chacune quatre affirmations A, B, C et D à cocher dont exactement une est vraie. Cocher l'affirmation correcte rapporte 1 point, en cocher une autre n'enlève ni ne rapporte aucun point. Un candidat coche au hasard une affirmation par question, on note X le nombre de points qu'il obtient au questionnaire.

Question 36 :

A - X suit une loi uniforme

B - $P(X = k+1) \geqslant P(X = k) \Leftrightarrow k \leqslant 4,25$

C - La note la plus probable du candidat est $E(X - 1)$

D - $P(X = 1) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{19}$