Corrigé

Épreuve 2021
Mathématiques
(concours ENAC EPL/S)

Solutions proposés par : Angèle Niclas*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours EPL/S 2021. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat du travail d'Angèle uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-epl.fr

*Agrégée de Mathématiques, Maitre de conférence à l'université Paris Cité, ayant participé à la rédaction d'annales corrigées des concours filières MP, PC et PSI, entre 2018 et 2023.

Corrigé 2021

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	AB	D	C	D	E	A	B	D	C	A	BC

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
D	AC	B	E	CD	A	D	C	C	B	A	CD

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
AC	AD	A	D	E	B	C	B	B	B	D	A

Question 1 : D
D'après l'expression de z, on a :

$$\mathrm{Re}(z) = 1 - \tan^2(\alpha) \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 2\tan(\alpha)$$

Commençons par tester un angle $\alpha = -\dfrac{\pi}{6}$ qui est bien dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4};0\right[$. On a alors :

$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

et

$$\tan^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Re}(z) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ et } \mathrm{Im}(z) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Comme $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{2}{3} > 0$ la réponse A est fausse. De même :

$$\left(1 + \tan^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \neq \frac{2}{3}$$

Donc la réponse C est fausse. Enfin, on sait que :

$$\tan(\arg(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = -\sqrt{3}$$

Comme $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \neq -\sqrt{3}$, la réponse B est fausse. En revanche :

$$\begin{aligned}
\left(1 + \tan^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \times \sin\left(-\frac{2\pi}{6}\right) &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \\
&= \mathrm{Im}(z)
\end{aligned}$$

Ainsi la réponse D semble juste. Pour le prouver, on prend la cas général d'un angle $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4};0\right[$ et alors :

$$\begin{aligned}
(1+\tan^2(\alpha)) \times \sin(2\alpha) &= \left(1+\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right) \times 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
&= \frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \times 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
&= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \times 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{2\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\tan(\alpha)
\end{aligned}$$

Question 2 : A et B

Tout nombre n dont l'écriture décimale se termine par 5 s'écrit $n = 5 + 10 \times k$ où $k \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
n^2 = (5+10k)^2 &= 25 + 2 \times 5 \times 10k + 100k^2 \\
&= 25 + 100k + 100k^2 \\
&= 25 + 100 \times (k + k^2)
\end{aligned}$$

L'écriture de $100(k+k^2)$ se termine par deux 0 donc celle de n se termine par 25. En particulier les réponses A et B sont justes. En revanche, en prenant $n = 5$ et donc $n^2 = 25$, on voit que les réponses C et D sont fausses.

Question 3 : D

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\bullet \left(-1+\sqrt{3}i\right)^0 &= 1 \\
\bullet \left(-1+\sqrt{3}i\right)^1 &= -1+\sqrt{3}i \\
\bullet \left(-1+\sqrt{3}i\right)^2 &= 1 - 2\sqrt{3}i - 3 = -2 - 2\sqrt{3}i \\
\bullet \left(-1+\sqrt{3}i\right)^3 &= \left(-1+\sqrt{3}i\right)\left(-2-2\sqrt{3}i\right) \\
&= 2 - \cancel{2\sqrt{3}i} + \cancel{2\sqrt{3}i} + 2 \times 3 \\
&= 8
\end{aligned}$$

Les premiers exemples suggèrent que la réponse D est juste. Pour le prouver, si $k \in \mathbb{Z}$ alors sa division euclidienne par 3 s'écrit $k = 3q + r$ où $r = 0,\ 1$ ou 2 et $q \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^k = \left[\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3\right]^q \times \left(-1+\sqrt{3}i\right)^r$$

Mais $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3 \in \mathbb{R}$ donc $\left[\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3\right]^q \in \mathbb{R}$, et pour $r = 0,\ 1$ ou 2 le nombre $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^r$ n'est pas un imaginaire pur. Ainsi, $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^k$ n'est jamais un imaginaire pur.

Question 4 : C
La fonction F est une primitive de $f : t \mapsto \sin^2(t)$. Elle est donc dérivable et $F'(x) = f(x) = \sin^2(x) \geqslant 0$. La fonction F est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, si $F(x) = F(y)$ avec $y \geqslant x$ alors :

$$\int_0^x \sin^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^y \sin^2(t)\ \mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_x^y \sin^2(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

Comme $\sin^2(t) \geqslant 0$, cela implique que pour tout $t \in [x, y]$, $\sin^2(t) = 0$. Mais $t \mapsto \sin^2(t)$ n'est jamais nulle sur un intervalle contenant plus d'un point donc $x = y$ et F est strictement croissante. Par ailleurs, $t \mapsto \sin^2(t)$ est π-périodique et :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^2(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1-\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left(\pi - 0 - \cancel{\frac{\sin(2\pi)}{2}} + \cancel{\frac{\sin(0)}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

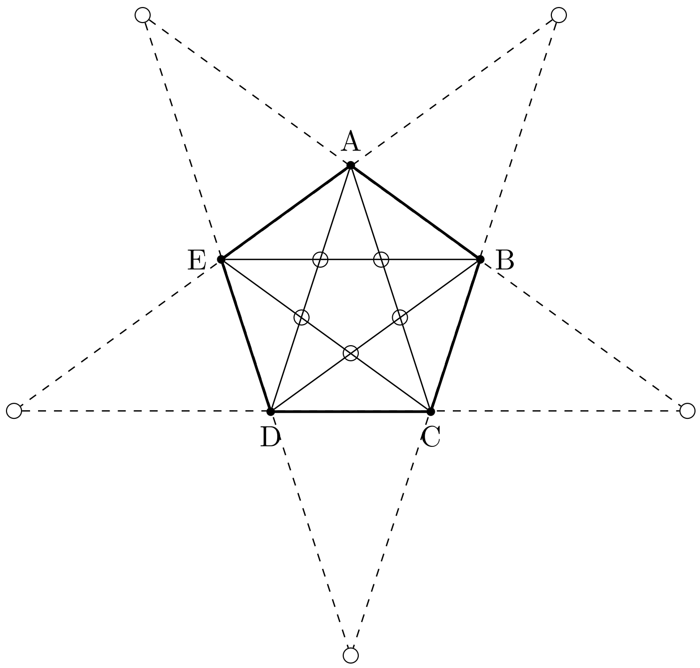
Donc $F(100\pi) = 100 \times \int_0^\pi \sin^2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{100\pi}{2} \geqslant \frac{300}{2} > 100$, et $F(0) = 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre 0 et 100π, il existe une unique solution à l'équation $F(x) = 100$.

Question 5 : D
Remarquons que les fractions dans les réponses sont données sous forme irréductible et sont donc toutes différentes. Il y a donc au maximum une bonne réponse. Notons E l'évènement "le candidat a au moins une réponse exacte". Il semble plus simple de calculer son évènement contraire $\overline{E}$: "toutes les réponses sont fausses". Chacune des 4 questions est indépendante, et la probabilité de répondre faux sur une question est de $\frac{2}{3}$. On a alors :

$$\mathrm{P}(E) = 1 - \mathrm{P}(\overline{E}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

Question 6 : E

Notons $S = \{A, B, C, D, E\}$ les sommets du pentagone régulier. Un rapide dessin permet d'intuiter qu'aucune des réponses ne semble juste : il semble y avoir 5 diagonales, 10 éléments dans Δ, 10 points d'intersection de Δ autres que les sommets, et une dizaine de triangles formés des sommets.



Prouvons le formellement. On commence par compter les droites de Δ. Pour créer une droite de Δ, il faut choisir deux points de S sans ordre, donc c'est une combinaison de 2 éléments parmi 5, et :

$$\mathrm{card}(\Delta) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Ainsi, la réponse B est fausse. Comptons désormais les diagonales. Δ est formé des diagonales et des côtés. Il y a 5 côtés donc $10 - 5 = 5$ diagonales, donc la réponse C est fausse. Comptons les triangles formés par 3 sommets, notés T. Pour créer un triangle, on choisit un 3-uplet sans ordre de S donc une combinaison de 3 éléments parmi 5, et :

$$\mathrm{card}(T) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$$

Donc la réponse D est fausse. Finalement, comptons les intersections de Δ distinctes des sommets. Deux droites se coupent en un point au plus, et si deux droites de Δ ont un sommet en commun alors elles se coupent en le sommet. On doit donc compter le nombre de couples de droites de Δ sans sommets communs. Pour former ces couples, il faut choisir 4 sommets sans ordre dans S ce qui donne $\binom{5}{4} = 5$ choix (par exemple, $ABCD$).

Ensuite, étant donné un de ces sommets, on peut le relier avec un des 3 autres sommets, donc il y a 3 choix possibles. Les deux sommets restant sont alors reliés pour former la deuxième droite (par exemple, (AB) et (CD) ou (AC) et (BD) ou (AD) et (BC)). Au total, il y a donc $3 \times 5 = 15$ couples de droites de Δ sans sommet commun, donc les intersections de Δ distinctes des sommets sont inférieures ou égales à 15, et la réponse A est fausse.

Question 7 : A
La proposition (i) se traduit par "avant rouge $\Rightarrow$ arrière vert". Il faut donc retourner 1 et 5 pour vérifier que l'arrière est vert, et 3,4,6 pour vérifier que l'autre côté n'est pas rouge. En revanche, il n'y a pas besoin de vérifier 2 car son autre côté peut être de n'importe quelle couleur (il n'y a pas équivalence, seulement implication). Ainsi, A est juste et B est fausse. De même (ii) se traduit par "avant jaune $\Rightarrow$ arrière noir". Il faut retourner 6 pour vérifier que l'arrière est noir, et 1,2,5 pour vérifier que l'autre côté n'est pas jaune. Les réponses C et D sont alors fausses.

Question 8 : B
Remarquons que $\sqrt{3}\times 0+0\neq 2$ donc $O\notin(d)$ et la réponse D est fausse. Si $M(x,y)\in(d)\cap(C)$ alors :

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{3}x+y=2\\ x^2+y^2=1\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}y=2-\sqrt{3}x\\ x^2+(2-\sqrt{3}x)^2=1\end{array}\right.$$

La deuxième équation s'écrit :

$$x^2+4-4\sqrt{3}x+3x^2=1\Rightarrow x^2-\sqrt{3}x+\frac{3}{4}=0$$

C'est un polynôme du second degré, de discriminant $\Delta=3-4\times\frac{3}{4}=0$. Il y a donc une unique solution x_0, et en posant $y_0=2-\sqrt{3}x_0$, il y a un unique point d'intersection entre (d) et (C), et seule la réponse B est correcte.

Question 9 : D
On calcule l'intégrale en faisant deux intégrations par parties successives. On intègre les cos ou les sin, et on dérive les polynômes en t :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[t^2\sin(t)\Big]_0^\pi-\int_0^\pi 2t\sin(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \cancel{\pi^2\sin(\pi)}-0+\int_0^\pi 2t\times(-\sin(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[2t\cos(t)\Big]_0^\pi-\int_0^\pi 2\cos(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\pi\cos(\pi)-0-\Big[2\sin(t)\Big]_0^\pi\\ &= -2\pi-\cancel{2\sin(\pi)}+\cancel{2\sin(0)}\\ &= -2\pi\end{aligned}$$

Seule la réponse D est juste.

Question 10 : C
Soit α une racine de $x^2-x-1=0$, alors $\alpha^2=\alpha+1$.
Ainsi :

$$\alpha^4=\left(\alpha^2\right)^2=(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1=\alpha+1+2\alpha+1=3\alpha+2$$

Et

$$\alpha^5=\alpha^4\times\alpha=3\alpha^2+2\alpha=3(\alpha+1)+2\alpha=5\alpha+3$$

Donc seule la réponse C est juste.

Question 11 : A

Supposons que chaque client paye x pour une quantité y de marchandise. En demandant une réduction de 10% du prix, il paiera alors $x - \dfrac{x}{10} = \dfrac{9}{10}x$ pour la même quantité y de marchandise. En demandant une augmentation de 10% de la quantité, il recevra en payant x une quantité de $y + \dfrac{y}{10} = \dfrac{11}{10}y$. En ramenant le prix à la quantité initiale y, il paiera $\dfrac{10}{11}x$ pour avoir une quantité y. Comme $\dfrac{10}{11} > \dfrac{9}{10}$, il doit toujours demander une réduction du prix et seule la réponse A est juste.

Question 12 : B et C

Posons $x = \dfrac{1}{2} + h$ avec $h \in \left]0; \dfrac{1}{2}\right]$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-2x}|\cos(\pi x)| &= e^{-1}e^{-2h}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi h\right)\right| \\ &= e^{-1}e^{-2h} \times \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi h\right)\right) \\ &\underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} e^{-1} \times \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

De même, si $h \in \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right[$ alors :

$$f(x) = e^{-1}e^{-2h}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi h\right) \underset{h\to 0^-}{\longrightarrow} e^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Donc f est continue en $\dfrac{1}{2}$ et la réponse B est juste, et A est fausse.

Si $h \in \left]0; \dfrac{1}{2}\right]$, alors le taux d'accroissement de f en $\dfrac{1}{2}$ vaut :

$$\begin{aligned} \frac{f\left(\frac{1}{2} + h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} &= \frac{-e^{-1}e^{-2h}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi h\right) - 0}{h} \\ &= \frac{e^{-1}e^{-2h}\sin(\pi h)}{h} \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{e^{-1} \times \pi h}{h} = e^{-1}\pi \end{aligned}$$

Si $h \in \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right[$ alors ce taux devient :

$$\begin{aligned} \frac{f\left(\frac{1}{2} + h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} &= \frac{e^{-1}e^{-2h}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi h\right) - 0}{h} \\ &= \frac{e^{-1}e^{-2h} \times (-\sin(\pi h))}{h} \underset{h\to 0^-}{\sim} -e^{-1}\pi \end{aligned}$$

Les limites à gauche et à droite ne sont pas égales donc la fonction n'est pas dérivable en $\dfrac{1}{2}$, donc la réponse C est juste et D est fausse.

Question 13 : D
En posant $u(t) = \sin(t)$, on remarque que :

$$\begin{aligned} J(x) = \int_0^x [u(t)]^5 u'(t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{6}\,[u(t)]^6\right]_0^x &= \frac{1}{6}[\sin(x)]^6 - \frac{1}{6}[\sin(0)]^6 \\ &= \frac{1}{6}[\sin(x)]^6 \end{aligned}$$

Pour intégrer $J(x)$, il faut donc linéariser $[\sin(x)]^6$. En utilisant le triangle de Pascal, on sait que :

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Comme $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, on a alors :

$$\begin{aligned} [\sin(x)]^6 &= \left(\frac{1}{2i}\right)^6 \times \left[e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\right] \\ &= \left(\frac{1}{2i}\right)^6 \times \left[2\cos(6x) - 12\cos(4x) + 30\cos(2x) - 20\right] \\ &= -\frac{\cos(6x)}{2^5} + \frac{6\cos(4x)}{2^5} - \frac{15\cos(2x)}{2^5} + \frac{5}{2^4} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{6}[\sin(x)]^6\ \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{6\times 2^5}\left[\frac{\sin(6x)}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \cancel{\frac{1}{2^5}\left[\frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}} - \frac{15}{6\times 2^5}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{5}{6\times 2^4} \times \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{1}{6\times 2^5} \times \left(-\frac{1}{6}\right) - \frac{15}{6\times 2^5} \times \frac{1}{2} + \frac{5\pi}{6\times 2^6} \\ &= \frac{15\pi + 1 - 45}{3^2 \times 2^7} = \frac{15\pi - 44}{3^2\times 2^7} \end{aligned}$$

Comme $3^2 \times 2^7 = 1152$, seule la réponse D est correcte.

Question 14 : A et C
Calculons les premiers termes de la suite :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 2 \times 1 - 0 + 1 = 3,\ u_2 = 2 \times 3 - 1 + 1 = 6,\ u_3 = 2 \times 6 - 2 + 1 = 11, ...$$

On remarque que la réponse D est fausse, et que les réponses A et C semblent justes. Pour le montrer, on peut par exemple démontrer par récurrence que la proposition $\mathrm{P}(n)$: "$u_n \geqslant n$" est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$:

- Initialisation : $u_0 = 1 \geqslant 0$

- Hérédité : si $\mathrm{P}(n)$ est vraie alors :

$u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \geqslant 2n - n + 1 = n + 1$ et $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, $u_n \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc u_n diverge vers $+\infty$, donc la réponse A est juste et la réponse B est fausse. Comme $u_n \geqslant n \geqslant 0$, la réponse C est aussi juste.

Question 15 : B
En utilisant la formule des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}_B(A)\mathrm{P}(B) = 0.3 \times 0.2 = 0.06 \\
\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathrm{P}_{\overline{B}}(A)\mathrm{P}(\overline{B}) = 0.4 \times (1 - \mathrm{P}(B)) = 0.4 \times 0.8 = 0.32
\end{aligned}$$

Par la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = 0.06 + 0.32 = 0.38$$

Enfin on sait que :

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0.38 + 0.2 - 0.06 = 0.52$$

Donc seule la réponse B est juste.

Question 16 : E
Procédons par élimination. Si le losange est bleu, (iv) dit que le carré est vert puis (ii) que le cercle est bleu. Il y a deux objets bleus donc c'est impossible. Si c'est le cercle qui est bleu, (iii) affirme que le losange est vert. Le carré ne peut alors que être rouge, mais alors (i) affirme que le cercle est vert et aussi bleu, ce qui est contradictoire. Ainsi, c'est forcément le carré qui est bleu. Si le cercle est vert, (iii) dit que le losange est vert, et il y a deux objets verts ce qui est impossible. Ainsi, le carré est bleu, le cercle est rouge et le losange est vert. Aucune des réponses n'est alors juste.

Question 17 : C et D
Calculons l'espérance de la variable de gain Y :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= -10\times 0.15 - 7\times 0.25 + 0\times 0.2 + 3\times 0.2 + 12\times 0.15 + 16\times 0.05\\ &= -1.5 - 1.75 + 0.6 + 1.8 + 0.8\\ &= -3.25 + 3.2\\ &= -0.05\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}[Y]$ <0, le gain moyen du joueur est négatif et le jeu est inéquitable en faveur de la banque. Les réponses C et D sont justes, et A et B fausses.

Question 18 : A
Comme $\cos\left(x+\dfrac{2k\pi}{n}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$ on a :

$$\begin{aligned}J_n(x) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k\right)\end{aligned}$$

Comme $n\geqslant 2$, $\dfrac{2\pi}{n}\in]0;\pi]$ et $e^{\frac{2i\pi}{n}}\neq 1$. On peut donc appliquer la formule d'une somme d'une série géométrique et :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$$

Ainsi, $J_n(x) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\times 0\right) = 0$ et J_n est la fonction nulle. Elle est en particulier de signe constant, et la réponse A est juste, tandis que B, C et D sont fausses.

Question 19 : D

Notons que si $x = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ alors $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) K_n(x) = 0$ donc les réponses A et C sont fausses. Si $x \neq 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, alors :

$$K_n(x) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)x}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ix}\right)^k\right)$$

La formule de somme d'une série géométrique permet de dire que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ix}\right)^k &= \frac{1 - e^{ixn}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{-e^{\frac{ixn}{2}}\left(e^{\frac{ixn}{2}} - e^{-\frac{ixn}{2}}\right)}{-e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right)} \\
&= e^{\frac{ix(n-1)}{2}} \times \frac{\sin\left(\dfrac{xn}{2}\right) \times \cancel{2i}}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \times \cancel{2i}}
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \mathrm{Im}\left(e^{\frac{ix}{2}} \times e^{\frac{ix(n-1)}{2}}\right) \times \frac{\sin\left(\dfrac{xn}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \\
&= \mathrm{Im}\left(e^{\frac{ixn}{2}}\right) \times \frac{\sin\left(\dfrac{xn}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\left[\sin\left(\dfrac{xn}{2}\right)\right]^2}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) K_n(x) = \left[\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)\right]^2 \geqslant 0$ et la réponse D est juste.

Question 20 : C
Sur I_1 ou I_2, $x \neq 0$ et l'équation homogène s'écrit :

$$y' + \frac{(1-x)}{x} y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y = 0$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x} - 1$ est $x \mapsto \ln(x) - x$ donc sur I_1, les solutions de l'équation homogène s'écrivent :

$$S_1 = \left\{k_1 e^{-(\ln(x)-x)},\ k_1 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{k_1 e^x}{x},\ k_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

De même, sur I_2, les solutions s'écrivent :

$$S_2 = \left\{\frac{k_2 e^x}{x},\ k_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Cependant, la constante sur I_1 ou I_2 n'est pas forcément la même, donc la réponse A est fausse. De même, la fonction $\left\{y_0 : x \mapsto -\dfrac{1}{x}\right\}$ vérifie :

$$xy_0' + (1-x)y_0 = \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x}(1-x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + 1 = 1$$

Donc y_0 est une solution particulière de (E_1) et (E_2) et les solutions s'écrivent :

$$S_1 = \left\{\frac{k_1 e^x - 1}{x},\ k_1 \in \mathbb{R}\right\} \text{ et } S_2 = \left\{\frac{k_2 e^x - 1}{x},\ k_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

A nouveau, les constantes k_1 et k_2 ne sont pas forcément identiques et la réponse B est fausse. Notons par ailleurs que comme l'énoncé ne précise pas l'espace d'arrivée des fonctions, on pourrait très bien se placer dans $\mathbb{C}$ et prendre $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ ce qui rend aussi les réponses A et B fausses. Enfin, calculons la limite de y en 0 en faisant un développement limité en 0 :

$$y(x) = \frac{k \times (1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)) - 1}{x} = \frac{k-1}{x} + k + \underset{x\to 0}{o}(1)$$

En particulier, si $k \neq 1$ alors $y(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty$. Donc y a une limite finie en 0 si et seulement si $k = 1$, et la réponse C est juste et D est fausse.

Remarque : S'appuyer sur le détail des constantes semble léger pour éliminer A et B. Or, le concepteur du sujet lui même nous a confirmé que ces propositions étaient fausses, évoquant une subtilité, sans préciser laquelle. Notre démonstration correspond bien à ce cas de figure.

Question 21 : C
En posant le changement de variable $u = 1 - x$, on remarque que :

$$B(p,q) = -\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,\mathrm{d}u = B(q,p)$$

La relation B est symétrique en p et q et les réponses B et D sont donc fausses. De plus, $\forall p \in \mathbb{N}^*$:

$$B(p,1) = \int_0^1 x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^p}{p}\right]_0^1 = \frac{1}{p} = \frac{(p-1)!(1-1)!}{(p+1-1)!}$$

Donc la réponse A est fausse. Pour prouver que la réponse C est juste, on remarque avec une intégration par partie que :

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \cancel{\left[\frac{x^p}{p}\times(1-x)^{q-1}\right]_0^1} - \int_0^1 \frac{x^p}{p}\times(-1)\times(1-x)^{q-2}\times(q-1)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\times\frac{q-1}{p}\,\mathrm{d}x = B(p+1,q-1)\times\frac{q-1}{p} \end{aligned}$$

On remarque alors par récurrence immédiate que :

$$\begin{aligned} B(p,q) &= B(p+1,q-1)\times\frac{q-1}{p} \\ &= B(p+2,q-2)\times\frac{(q-1)(q-2)}{p(p+1)} \\ &\vdots \\ &= B(p+q-1,1)\times\frac{(q-1)(q-2)\times\ldots\times 1}{p(p+1)\times\ldots\times(p+q-2)} \\ &= \frac{1}{p+q-1}\times\frac{(q-1)!(p-1)!}{(p+q-2)!} \\ &= \frac{(q-1)!(p-1)!}{(p+q-1)!} \end{aligned}$$

Question 22 : B
Décomposons 15! en diviseurs premiers :

$$\begin{aligned} 15! &= 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \\ &= (3 \times 5) \times (7 \times 2) \times 13 \times (2^2 \times 3) \times 11 \times (2 \times 5) \times (3^2) \times \\ &\qquad (2^3) \times 7 \times (2 \times 3) \times 5 \times (2^2) \times 3 \times 2 \\ &= 2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

Chaque diviseur de 15! s'écrit sous la forme :

$$2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e \times 13^f$$

avec $a \in [\![0;11]\!]$, $b \in [\![0;6]\!]$, $c \in [\![0;3]\!]$, $d \in [\![0;2]\!]$, $e \in [\![0;1]\!]$, $f \in [\![0;1]\!]$.
On a donc 12 choix pour a, 7 pour b, 4 pour c, 3 pour d et 2 pour e et f, d'où un total de $12 \times 7 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 4032$ choix. Il y a donc 4032 diviseurs et seule la réponse B est juste.

Question 23 : A
On cherche à calculer 100^{1000} [13]. Remarquons que $100 = 13 \times 7 + 9$ donc $100\ [13] \equiv 9\ [13]$.
Puis :

$$\begin{aligned} 100^2\ [13] &\equiv 9^2\ [13] \equiv (-4)^2\ [13] \equiv 16\ [13] \equiv 3\ [13] \\ 100^3\ [13] &\equiv 3 \times 9\ [13] \equiv 27\ [13] \equiv 1\ [13] \end{aligned}$$

Ainsi, comme $100^{1000} = 100 \times 100^{999} = 100 \times \left(100^3\right)^{333}$, on voit que $100^{1000}\ [13] \equiv 9 \times 1^{333}\ [13] \equiv 9\ [13]$ donc le reste de la division de 100^{1000} par 13 est 9 et la réponse A est la seule réponse juste.

Question 24 : C et D
La classe d'équivalence de z est $\{u \in \mathbb{C} \text{ tel que } uRz\}$ donc aussi $\{u \in \mathbb{C} \text{ tel que } |u| = |z|\}$ et la réponse D est juste.

Ecrivons z sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$. On a alors $|z| = r$. De même, si $u = r'e^{i\theta'}$, alors $|u| = r'$ et on voit que $uRz \Leftrightarrow |z| = |u| \Leftrightarrow r' = r$. Donc $u = re^{i\theta'}$ avec $\theta' \in \mathbb{R}$, et la classe d'équivalence de z est :

$$\{u \in \mathbb{C} \text{ tel que } uRz\} = \{re^{i\theta'},\ \theta' \in \mathbb{R}\} = r \times C(0,1) = C(0,r)$$

où $C(a,b)$ est la cercle de centre a et de rayon b. La réponse C est donc juste. La réponse B est fausse en prenant le contre exemple où :

$$z = 1,\ u = 2,\ z \in C(0,1),\ u \in C(0,2) \text{ et } |z| \neq |u|$$

donc u et z ne sont pas en relation. De même, la réponse A est fausse en prenant le contre exemple où :

$$z = 1,\ z \in C(0,1) \text{ et } u = 2,\ u \in C(1,1) \text{ et } |z| \neq |u|$$

donc u et z ne sont pas en relation.

Question 25 : A et C
Supposons que $\exists\ a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$. On a alors :

$$\left\{\begin{array}{l} 3a+b+7c=0 \\ 5b+5c=0 \\ a+2c=0 \\ -2a-b+c=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-c \\ a=-2c \\ -6c-c+7c=0 \\ 4c+c+c=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-c \\ a=-2c \\ 6c=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$$

Donc la famille est libre et la réponse A est juste et B est fausse. De même, supposons que $\exists\ a, b, c \in \mathbb{Q}$ tels que $a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c = 0$. On a alors :

$$\sqrt{3}c = -a - \sqrt{2}b \ \Rightarrow\ 3c^2 = a^2 + 2\sqrt{2}ba + 2b^2 \ \Rightarrow\ 2\sqrt{2}ab = 3c^2 - a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Q}$$

Comme $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cela implique que $ab = 0$. De même, $\sqrt{2}b = -a - \sqrt{3}c$ et donc :

$$2b^2 = a^2 + 2\sqrt{3}ac + 3c^2 \ \Rightarrow\ 2\sqrt{3}ac = 2b^2 - a^2 - 3c^2 \in \mathbb{Q}$$

Comme $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cela implique que $ac = 0$. Enfin, $a = -\sqrt{2}b - \sqrt{3}c$ d'où :

$$a^2 = 2b^2 + 3c^2 + 2\sqrt{6}bc \ \Rightarrow\ 2\sqrt{6}bc = a^2 - 2b^2 - 3c^2 \in \mathbb{Q}$$

Comme $\sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cela implique que $bc = 0$. Donc $ab = bc = ac = 0$.

Si $c \neq 0$, alors $a = b = 0$ mais alors $\sqrt{3}c = -a - \sqrt{2}b$ donc $c = 0$ et il y a contradiction.

Si $a \neq 0$, $c = b = 0$ mais alors $a = -\sqrt{2}b - \sqrt{3}c$ donc $a = 0$, ce qui est encore contradictoire.

Si $b \neq 0$, $c = a = 0$ et $\sqrt{2}b = -a - \sqrt{3}c$ donc $b = 0$, ce qui est contradictoire.

Donc la seule solution est $a = b = c = 0$ donc la famille est libre, la réponse C est juste et D fausse.

Question 26 : A et D
Par opérations sur les colonnes :

$$rg(M) \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix}$$

Si $a = c \neq b$, alors :

$$rg(M) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b+c & a-b \\ bc & c(a-b) \end{pmatrix}$$

Et comme la famille est échelonnée, $rg(M) = 2$. De même, si $a = b \neq c$:

$$rg(M) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b+c & a-c \\ bc & b(a-c) \end{pmatrix}$$

Et comme la famille est échelonnée, $rg(M) = 2$. Sinon, si a, b, c sont tous disctincts ou $b = c \neq a$, on a :

$$rg(M) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix}$$

Si $b = c \neq a$, alors :

$$rg(M) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b+c & 1 \\ bc & c \end{pmatrix}$$

et la famille est échelonnée, et $rg(M) = 2$. Si a, b, c sont tous distincts :

$$rg(M) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \end{pmatrix} = 3$$

car la famille est échelonnée. Donc les réponses A et D sont justes, et B et C fausses.

Question 27 : A
En linéarisant $\cos^2(x)$ et $\sin^{2(x)}$, on a :

$$\begin{aligned} 2^{4\cos^2(x)+1} &= 2^{4\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)+1} = 2^{2+2\cos(2x)+1} = 8\times 2^{2\cos(2x)} \\ 16\times 2^{4\sin^2(x)-3} &= 16\times 2^{4\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)-3} = 2^4\times 2^{2-2\cos(2x)-3} = 8\times 2^{-2\cos(2x)} \end{aligned}$$

Si $x\in S$ alors $8\left(2^{2\cos(2x)}+2^{-2\cos(2x)}\right)=20$. On pose $X=2^{2\cos(2x)}$, et alors :

$$2X+\frac{2}{X}=5\Rightarrow 2X^2-5X+2=0$$

C'est un polynôme du second degrés de discriminant $\Delta=25-4\times 4=9$ et donc les racines sont :

$$X_1=\frac{5+3}{4}=2 \text{ et } X_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$$

Puis :

$$\begin{aligned} 2^{2\cos(2x)}=2 \Leftrightarrow 2\cos(2x)=1 &\Leftrightarrow \cos(2x)=\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } 2x=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\ [\pi] \text{ ou } x=-\frac{\pi}{6}\ [\pi] \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} 2^{2\cos(2x)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos(2x)=-1 &\Leftrightarrow \cos(2x)=-\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } 2x=-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}\ [\pi] \text{ ou } x=-\frac{\pi}{3}\ [\pi] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} S &= \left\{\frac{\pi}{6}+k_1\pi\,;\frac{5\pi}{6}+k_2\pi\,;\frac{\pi}{3}+k_3\pi\,;\frac{2\pi}{3}+k_4\pi\right\} \text{ avec } k_1,k_2,k_3,k_4\in\mathbb{Z} \\ &= \left\{\frac{\pi}{6}+2k_1\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+2k_2\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{3}+2k_3\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+2k_4\frac{\pi}{2}\right\} \\ &= \left\{\frac{\pi}{6}+2k_1\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{6}+(2k_4+1)\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{3}+2k_3\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{3}+(2k_2+1)\frac{\pi}{2}\right\} \end{aligned}$$

En remarquant que $2k_1$ et $2k_4+1$ parcourent exactement $\mathbb{Z}$, et de même pour $2k_3$ et $2k_2+1$, on conclut que $S=\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{3}+k'\frac{\pi}{2}\right\}$ avec $k,k'\in\mathbb{Z}$. Conclusion, seule la réponse A est juste.

Question 28 : D

Posons $f(x) = \tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x)$. La fonction $y \mapsto \tan(y)$ n'est pas définie si $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc :

$$D_f = [0\,;\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\,;\frac{\pi}{8}\,;\frac{3\pi}{8}\,;\frac{5\pi}{8}\,;\frac{7\pi}{8} \right\}$$

Comme $y \mapsto \tan(y)$ est strictement croissante, la fonction f est strictement croissante et on peut dresser le tableau de variation suivant (en deux parties car trop long) :

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$f(x)$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	0

f est naturellement continue sur son intervalle de définition, ainsi, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre 0 et $\dfrac{\pi}{8}$, $f(x) = 0$ a exactement une solution (en l'occurence $x = 0$). En faisant de même sur

$$\left[\frac{\pi}{8}\,;\frac{\pi}{6}\right] \text{ puis } \left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{8}\right], \left[\frac{3\pi}{8}\,;\frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{5\pi}{8}\right], \left[\frac{5\pi}{8}\,;\frac{3\pi}{4}\right], \left[\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{6}\right],$$

$\left[\dfrac{5\pi}{6}\,;\dfrac{7\pi}{8}\right], \left[\dfrac{7\pi}{8}\,;\pi\right]$, on obtient exactement 10 solutions à l'équation

$f(x) = 0$, donc seule la réponse D est juste.

Question 29 : E

Remarquons que le polynôme $X^3(X-1)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$ donc la décomposition en éléments simples de la fraction s'écrit normalement :

$$a + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x} + \frac{e}{(x-1)^2} + \frac{f}{x-1} \text{ où } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

Aucune expression n'est de cette forme donc toutes les réponses sont fausses. Un autre argument serait d'évaluer ces expressions en $x = -1$. La fraction vaut $-\dfrac{19}{4}$, la réponse A donne $\dfrac{1}{2}$, la réponse B donne -4, la réponse C donne $-\dfrac{11}{2}$, et la réponse D donne 2. Aucune des réponses ne peut donc être juste.

Question 30 : B
En utilisant les développements limités :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\ln\left(1+(x+\underset{x\to 0}{o}(x))^2\right) \\ &= \frac{1}{x}\ln\left(1+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = x+\underset{x\to 0}{o}(x) \end{aligned}$$

En particulier, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0)$ donc f est continue en 0 et la réponse B est juste. Calculons le taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{x} = 1+\underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Donc la fonction est dérivable en 0 et la réponse A est fausse. Par ailleurs :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\ln(1+1) = \frac{2\ln(2)}{\pi} \text{ et } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}\ln(2) = -\frac{2\ln(2)}{\pi}$$

Comme $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ la fonction n'est pas π-périodique et la réponse C est fausse. Enfin :

$$\sin^2(x) \in [0\,,1] \Rightarrow \ln(1+\sin^2(x)) \in [0\,;\ln(2)] \Rightarrow |f(x)| \leqslant \frac{\ln(2)}{|x|} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ et la réponse D est fausse.

Question 31 : C
On a $\forall t \in [0\,;1]$:

$$\frac{1}{(1+t^n)^2} \leqslant 1 \Rightarrow I_n \leqslant 1$$

De plus, on sait que $\forall x \in [0\,;1]$:

$$\frac{1}{1+x} \geqslant 1-x$$

Ainsi, $\dfrac{1}{(1+t^n)^2} \geqslant (1-t^n)^2$ et on a :

$$\begin{aligned} I_n \geqslant \int_0^1 (1-t^n)^2\ \mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(1-2t^n+t^{2n}\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \left[t-\frac{2t^{n+1}}{n+1}+\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \\ &= 1-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{2n+1} \\ &\underset{n\to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement, I_n est bornée et tends vers 1, donc la réponse C est juste, A fausse et D fausse. On remarque aussi que $\forall (t,n) \in [0\,;1] \times \mathbb{N}^*$:

$$t^{n+1} \leqslant t^n \Rightarrow \frac{1}{(1+t^{n+1})^2} \geqslant \frac{1}{(1+t^n)^2}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} \geqslant I_n$ donc la suite est croissante et la réponse B est fausse.

Question 32 : B

La suite est une suite récurrente d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}$. La discriminant vaut $\Delta = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$ et les racines sont :

$$r_1 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 1 \text{ et } r_2 = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

On sait alors que $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = ar_1^n + br_2^n = a + \frac{b}{2^n}$. Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, on a :

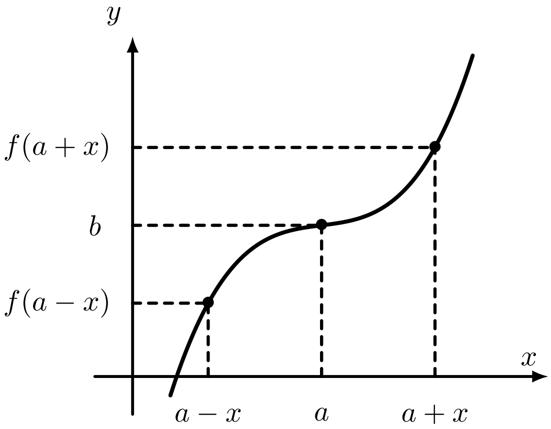
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a + \frac{b}{2} = 2 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{b}{2} = -1 \\ a = 1 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

Donc $u_n = 3 - \frac{2}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$. En particulier, la réponse A est fausse. Si $n \to +\infty$, on a directement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$ et la réponse B est vraie. Enfin :

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= 3 - \frac{1}{2^n} - \left(3 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = -\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{-1+2}{2^n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et les réponses C et D sont fausses.

Question 33 : B
Une courbe est symétrique par rapport au point $(a\ ,b)$ si $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(a+x)-b = b - f(a-x)$ comme illustré.



Ici :

$$f(1+x) = \frac{2+x}{x} \text{ et } f(1-x) = \frac{-2+x}{x}$$

Donc :

$$f(1+x)+f(1-x) = \frac{-2+2+x+x}{x} = 2$$

Si b existe, alors $f(1+x)+f(1-x) = 2b = 2$ donc la seule valeur de b qui convienne est $b=1$.
Réciproquement, on a bien :

$$f(1+x)-1 = \frac{2}{x} = 1 - f(1-x)$$

Donc seule la réponse B est correcte.

Question 34 : B
Ecrivons sous forme exponentielle puis effectuons un développement limité :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\times\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{x^2}\times\ln\left(\frac{x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to0}{o}(x^3)}{x}\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{x^2}\times\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{x^2}\times\left(-\frac{x^2}{6}+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{6}+\underset{x\to0}{o}(1)\right)\underset{x\to0}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

Donc seule la réponse B est juste.

Question 35 : D
Tout d'abord, évaluons la proposition A. On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=-n$ et $u_0=-1$. On a bien $u_n\neq 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$ pourtant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ce contre exemple prouve que la réponse A est fausse.

L'assertion B est également fausse car si on pose $n=4$ alors $n^3=4^3=16\times4=64$ et $3^4=9\times9=81$, donc $n^3<3^n$ si $n=4$.

L'assertion C est fausse, et il suffit de poser $v_n=n$ pour voir que $v_{n+1}-v_n=n+1-n=1>0.1$, mais $v_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Enfin, dans l'assertion D, w_n est une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 1, donc $w_n=1-2n$ et $x_n=e^{1-2n}$. Comme $1-2n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$ et que $x\mapsto e^x$ est continue, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ donc la proposition D est juste.

Question 36 : A
En utilisant la définition des probabilités conditionnelles :

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}_A(B)\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$$
$$\mathrm{P}(\overline{A}\cap\overline{B})=\mathrm{P}_{\overline{A}}(\overline{B})\mathrm{P}(\overline{A})=(1-\mathrm{P}(A))\mathrm{P}_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$$

Puis :

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(\overline{A\cup B})=1-\mathrm{P}(\overline{A}\cap\overline{B})=1-\frac{2}{25}=\frac{23}{25}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A)\\
&= \frac{23}{25}+\frac{3}{20}-\frac{3}{5} = \frac{92+15-60}{100} = \frac{47}{100}
\end{aligned}$$

Seule la réponse A est juste.